

B. Extrempunkte und Wendepunkte trigonometrischer Funktionen

Beispiel: Extrem- und Wendepunkte einer Sinusfunktion

Bestimmen Sie die Hoch-, Tief- und Wendepunkte von $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) + 1$ im Intervall $0 \leq x \leq \pi$. Skizzieren Sie anschließend den Graphen von f .

Lösung:

Wir bestimmen zunächst die benötigten Ableitungen f' , f'' und f''' . Dabei verwenden wir die lineare Kettenregel, die besagt, dass $(\sin(ax))' = a \cdot \cos(ax)$ und dass $(\cos(ax))' = -a \cdot \sin(ax)$ gilt.

Zur Bestimmung der Extrempunkte lösen wir die Gleichung $f'(x) = \cos(2x) = 0$.

Sie hat im Intervall $[0; \pi]$ zwei Lösungen: $x = \frac{\pi}{4}$ und $x = \frac{3}{4}\pi$.

Durch Überprüfung mittels f'' erhalten wir einen Hochpunkt $H(\frac{\pi}{4} | \frac{3}{2})$ und einen Tiefpunkt $T(\frac{3}{4}\pi | \frac{1}{2})$.

Als Wendestellen erhalten wir mit der notwendigen Bedingung $f''(x) = -2 \sin(2x) = 0$ die Stellen $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = \pi$.

Durch Überprüfung mittels f''' ergeben sich zwei Links-Rechts-Wendepunkte $W_1(0|1)$ und $W_3(\pi|1)$ sowie ein Rechts-Links-Wendepunkt $W_2(\frac{\pi}{2}|1)$.

Durch Einzeichnen der Extrem- und Wendepunkte können wir nun den Graphen von f skizzieren. Man erkennt nun auch ohne weitere Rechnung, dass f keine Nullstellen besitzt.

Ableitungen von f :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \cdot 2 + 0 = \cos(2x)$$

$$f''(x) = -\sin(2x) \cdot 2 = -2 \sin(2x)$$

$$f'''(x) = -2 \cos(2x) \cdot 2 = -4 \cos(2x)$$

Extrempunkte von f :

$$f'(x) = \cos(2x) = 0 \quad (\text{notw. Bed.})$$

$$2x = \frac{\pi}{2} \quad \text{bzw.} \quad 2x = \frac{3}{2}\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{3}{2}, f''(\frac{\pi}{4}) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Max}$$

$$x = \frac{3}{4}\pi, y = \frac{1}{2}, f''(\frac{3}{4}\pi) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

$$\text{Hochpunkt } H(\frac{\pi}{4} | \frac{3}{2}); \text{ Tiefpunkt } T(\frac{3}{4}\pi | \frac{1}{2})$$

Wendepunkte von f :

$$f''(x) = -2 \sin(2x) = 0 \quad (\text{notw. Bed.})$$

$$2x = 0 \quad \text{bzw.} \quad 2x = \pi \quad \text{bzw.} \quad 2x = 2\pi$$

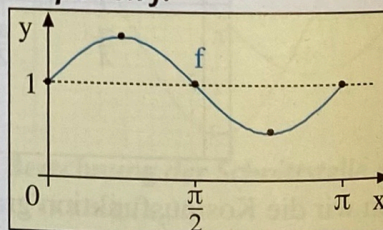
$$x = 0 \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{\pi}{2} \quad \text{bzw.} \quad x = \pi$$

$$x = 0: f'''(0) = -4 < 0 \Rightarrow \text{L-R-Wp } W_1(0|1)$$

$$x = \frac{\pi}{2}: f'''(\frac{\pi}{2}) = 4 > 0 \Rightarrow \text{R-L-Wp } W_2(\frac{\pi}{2}|1)$$

$$x = \pi: f'''(\pi) = -4 < 0 \Rightarrow \text{L-R-Wp } W_3(\pi|1)$$

Graph von f :



Übung 2 Extrem- und Wendepunkte

Untersuchen Sie f auf Extrem- und Wendepunkte und zeichnen Sie den Graphen von f .

a) $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + 1, \quad 0 \leq x \leq 3\pi$

c) $f(x) = 2 \cos(\frac{1}{2}x) - 1, \quad 0 \leq x \leq 4\pi$

e) $f(x) = 2 \cos x - x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

b) $f(x) = 2 \cos x - 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

d) $f(x) = -\sin x + 2x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

f) $f(x) = 3 \sin x - 2, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq 3\pi$

Übung 3 Nullstellen und Extremstellen

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 \sin x + \cos x$ im Intervall $[0; 2\pi]$.

Untersuchen Sie f auf Nullstellen und Extremstellen. Skizzieren Sie den Graphen von f .