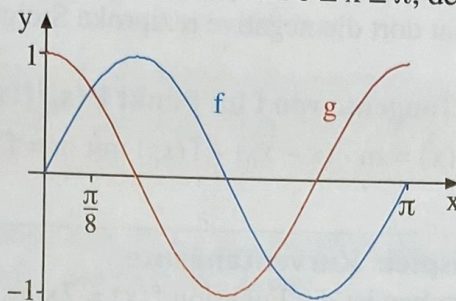


C. Steigungs- und Schnittwinkel von trigonometrischen Funktionen

Beispiel: Steigungswinkel, Schnittwinkel

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \sin(2x)$ und $g(x) = \cos(2x)$ im Intervall $0 \leq x \leq \pi$, deren Graphen rechts abgebildet sind.

- Zeigen Sie, dass f und g sich bei $x = \frac{\pi}{8}$ schneiden.
- Berechnen Sie den Steigungswinkel von f an der Stelle $x = \frac{\pi}{8}$.
- Berechnen Sie den Schnittwinkel von f und g bei $x = \frac{\pi}{8}$.



Lösung zu a:

Die Berechnung von $f(\frac{\pi}{8})$ und $g(\frac{\pi}{8})$ ergibt jeweils den Wert $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Also schneiden sich f und g im Punkt $P(\frac{\pi}{8} | \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Lösung zu b:

Wir bestimmen zunächst die Ableitungsfunktion $f'(x) = 2 \cos(2x)$, wobei wir Sinusregel und lineare Kettenregel anwenden. Dann berechnen wir $f'(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2}$. Dieser Steigungswert entspricht dem Tangens des Steigungswinkels α . Durch Anwendung des Arcus-Tangens erhalten wir das Resultat: $\alpha \approx 54,7^\circ$.

Lösung zu c:

Analog zu b) bestimmen wir den Steigungswinkel β von g bei $x = \frac{\pi}{8}$. Er lautet $\beta = -54,7^\circ$.

β ist hier negativ, so dass der Schnittwinkel von f und g eigentlich laut Skizze den Wert $\alpha + |\beta| = 109,4^\circ$ hätte. Da dieser Wert aber über 90° liegt, ist der Schnittwinkel gleich dem Ergänzungswinkel hiervon zu 180° . Also gilt $\gamma = 70,6^\circ$.

Schnittpunkt von f und g (Nachweis):

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ g\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow \text{Schnittpunkt } S\left(\frac{\pi}{8} \mid \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Steigungswinkel von f bei $x = \frac{\pi}{8}$:

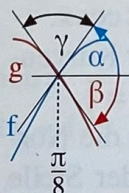
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cos(2x) \\ f'\left(\frac{\pi}{8}\right) &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \\ \tan \alpha &= \sqrt{2} \\ \alpha &= \arctan \sqrt{2} \approx 54,7^\circ \end{aligned}$$

Steigungswinkel von g bei $x = \frac{\pi}{8}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2 \sin(2x) \\ g'\left(\frac{\pi}{8}\right) &= -2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \\ \beta &= \arctan(-\sqrt{2}) \approx -54,7^\circ \text{ (bzw. } +125,3^\circ) \end{aligned}$$

Schnittwinkel von f und g :

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - \alpha - |\beta|, \text{ da } \beta < 0 \\ &\Rightarrow \gamma = 180^\circ - 54,7^\circ - 54,7^\circ \\ &\Rightarrow \gamma = 70,6^\circ \end{aligned}$$



Übung 4 Steigungswinkel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 \sin(\frac{\pi}{4}x)$ im Intervall $0 \leq x \leq 8$.

- Skizzieren Sie den Graphen von f .
- Berechnen Sie den Steigungswinkel α an der Stelle $x = 2$.
- Berechnen Sie, an welcher Stelle f den Steigungswinkel $\beta = 45^\circ$ hat.

Übung 5 Schnittwinkel

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = \sin(0,5x) \text{ und } g(x) = \cos(0,5x).$$

- Skizzieren Sie die Graphen von f und g .
- Zeigen Sie, dass $f(\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2})$ gilt.
- Berechnen Sie den Schnittwinkel von f und g bei $x = \frac{\pi}{2}$.

5. Funktionsuntersuchungen und Modellierungen

Im Folgenden untersuchen wir trigonometrische Funktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$ sowohl abstrakt als auch im Anwendungszusammenhang.

A. Abstrakte Kurvenuntersuchungen

Beispiel: Sinuskurve

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 1,5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ für $1 \leq x \leq 5$.

- Bestimmen Sie x- und y-Verschiebung, Periode und Amplitude. Zeichnen Sie den Graphen. Lesen Sie dann aus dem Graphen die Nullstellen, die Hoch- und Tiefpunkte sowie den Wendepunkt in Annäherung ab.
- Weisen Sie nach, dass $H(2|2,5)$ und $T(4|-0,5)$ tatsächlich die Extrempunkte von f sind.

Lösung zu a:

Wir formen die Gleichung von f so um, dass wir ablesen können, welche Manipulationen erforderlich sind, um den Graphen von f aus dem Graphen von $\sin x$ zu gewinnen.

$$f(x) = 1,5 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2}(x - 1)\right] + 1$$

x-Verschiebung: +1

y-Verschiebung: +1

Periode: $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

Amplitude: 1,5

Anhand dieser Daten skizzieren wir den Graphen von f und lesen die rechts dargestellten besonderen Punkte ab.

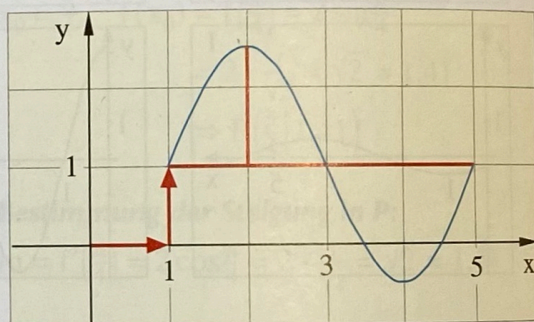
Lösung zu b:

Wir führen den Nachweis für die beiden Extrempunkte mit Hilfe der beiden ersten Ableitungen von f , die wir mit der Sinusregel, der Kosinusregel und der linearen Kettenregel bestimmen können.

Dann zeigen wir, dass $f'(2) = 0$ und $f''(2) < 0$ gilt, womit der Nachweis für den Hochpunkt erbracht ist.

Analog führen wir mittels $f'(4) = 0$ und $f''(4) > 0$ den Nachweis für den Tiefpunkt.

1. Graph von f :



Nullstellen: $x_1 \approx 3,5$; $x_2 \approx 4,5$

Extrempunkte: $H(2|2,5)$; $T(4|-0,5)$

Wendepunkt: $W(3|1)$

2. Nachweise zu den Extrempunkten:

$$f'(x) = 1,5 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -1,5 \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Hochpunkt: $f'(2) = 1,5 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$f''(2) = -1,5 \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx -3,7 < 0 \Rightarrow \text{Max}$$

Tiefpunkt: $f'(4) = 1,5 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$$f''(4) = -1,5 \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \approx 3,7 > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

Übung 1

Skizzieren Sie den Graphen von f im angegebenen Intervall und bestimmen Sie die Lage der Extrem- und Wendepunkte sowie die Nullstellen von f .

a) $f(x) = 2 \cdot \sin(2x - 4) + 1$, $2 \leq x \leq 2 + \pi$

b) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) - 1$, $2 \leq x \leq 6$

c) $f(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x - 2\pi\right) + 2$, $4 \leq x \leq 8$

d) $f(x) = -2 \cdot \sin(x - 2) + 1$, $2 \leq x \leq 2 + 2\pi$